

6.4. Elektrische Leitfähigkeit

6.11

- Ohm'sches Gesetz $I = G U$; $G = \frac{1}{R}$

- Strom pro Fläche $\vec{j} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{E}$;

$$j_x = \sigma E_x; \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

Impuls eines Elektrons: $\vec{p} = m \vec{v} = \hbar \vec{k}$

Kraft: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e \vec{E}$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{k}(t) - \vec{k}(0)}_{=: \delta \vec{k}} = -e \vec{E} / \hbar \cdot t$$

Warum wird das Elektron nicht unendlich schnell?

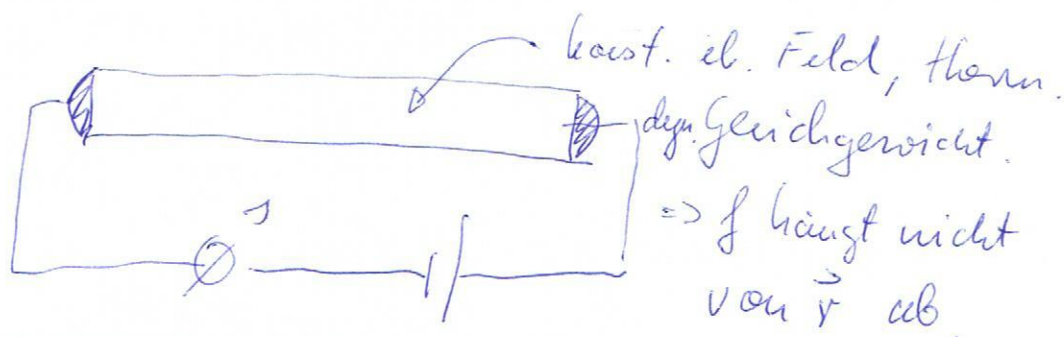
- Boltzmann-Gleichung:

$$\frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Diff}} + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Sto\ss e}}$$

Fermi-Vert. hängt vom Ort und vom Impuls k ab.

Hier: nur $\vec{k}$ -Abh. berücksichtigt! $f = f(\vec{k})$

($E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$) f. freie Elektronen.



Diffusion v. Elektronen:

6.12a

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Diff}} = \frac{\partial}{\partial t} f\left(\vec{k} + \frac{e\vec{E}}{\hbar} dt\right)$$

d.h. jedes Elektron mit $\vec{k} + \frac{e\vec{E}}{\hbar} dt$ bei $t-dt$ muß zum Zeitpunkt t bei $\vec{k}$ als Impuls haben:

$$f(\vec{k}, t) = f(\vec{k} - \delta\vec{k}, t - dt), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} = 0 \text{ hier 0 wegen stat.}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Diff}} = \frac{e\vec{E}}{\hbar} \vec{\nabla}_k f$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial t}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}} = - \frac{f - f_0}{\tau}$$

Relaxations-
zeitansatz.

Stationäre Bedingungen $\Rightarrow$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Diff}} = - \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}}$$

$$\frac{e\vec{E}}{\hbar} \vec{\nabla}_k f = \frac{f - f_0}{\tau}$$

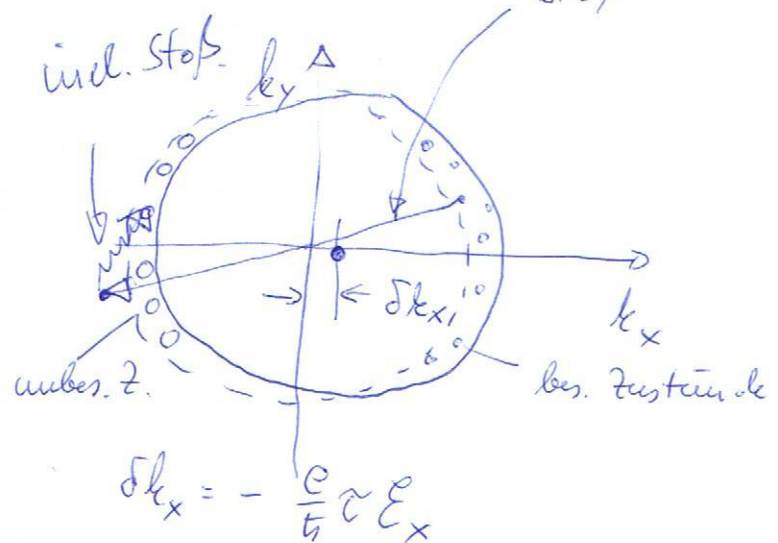
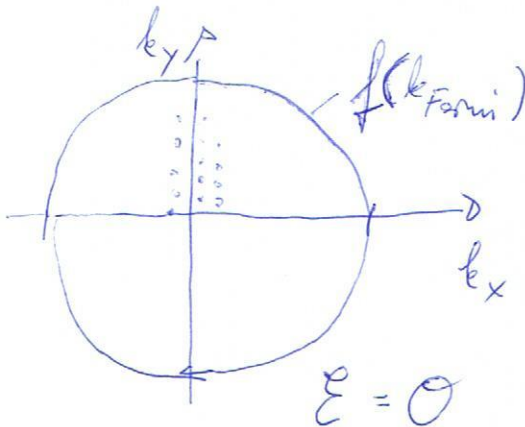
$$\Rightarrow f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) + \frac{e\vec{E}}{\hbar} \tau \vec{\nabla}_k f$$

Näherungsweise kann man annehmen 6.1.2b
 (kleine Felder $\vec{E}$), dass $\vec{\nabla}_{\vec{k}} f = \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$.

$$f(\vec{k}) \approx f_0(\vec{k}) + \frac{e}{\hbar} \tau \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0(\vec{k})$$

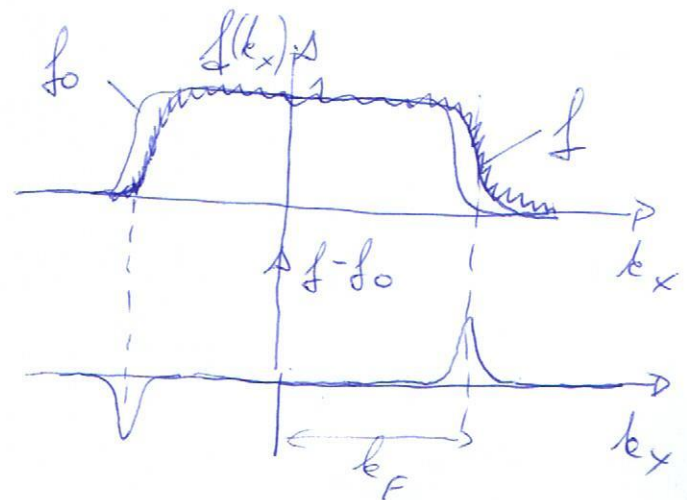
$$f(\vec{k}) \approx f_0(\vec{k} + \frac{e}{\hbar} \tau \vec{E})$$

energieerhaltender Stoß



incl. Stöße notw.
 zur Erreich. d. Gleichgew.
 incl. Stöße:

Energie wird in Wärme
 umgewandelt.



Stromdichte:

$$\vec{j} = \frac{(-1e)}{(2\pi)^3} \int_{\text{1. Br.-Z.}} \vec{v}(\vec{k}) f(\vec{k}) d^3 k$$

$$= -\frac{e}{8\pi^3} \int_{\text{1. Br.-Z.}} \vec{v}(\vec{k}) \left\{ f_0(\vec{k}) + \frac{e}{\hbar} \tau \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0(\vec{k}) \right\} d^3 k$$

- isotropes Medium od. kub. Gitter

6.12 c)

$$- \vec{E} = (E_x, 0, 0) ; \quad j_y = j_z = 0$$

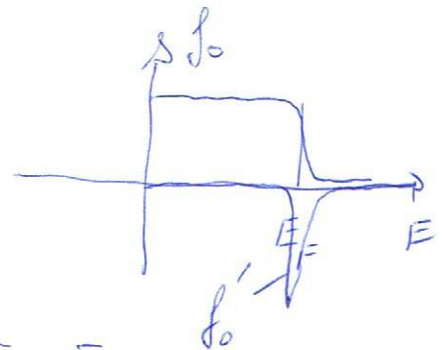
$$\Rightarrow j_x = -\frac{e}{8\pi^3} \int_{\text{B.Z.}} v_x \left\{ f_0(\vec{k}) + \frac{e}{\hbar} E_x \frac{\partial f_0}{\partial k_x} \right\} d^3k$$

$$\text{N.R.: } \frac{\partial f_0}{\partial k_x} = \frac{\partial f_0}{\partial E} \hbar v_x ; \quad \text{mit } \frac{\partial E}{\partial k_x} = \hbar v_x$$

$$j_x = -\frac{e^2}{8\pi^3} \int_{\text{B.Z.}} v_x^2 \tau \frac{\partial f_0}{\partial E} d^3k \cdot E_x$$

$=: \sigma$

$$\sigma = -\frac{e^2}{8\pi^3} \int_{\text{B.Z.}} v_x^2 \tau \frac{\partial f_0}{\partial E} d^3k$$



Bei tiefen Temperaturen $T \ll T_F$

$$\text{gilt } \frac{\partial f_0}{\partial E} = -\delta(E - E_F)$$

$$d^3k = df_E dk_{\perp} = df_E \cdot \frac{dE}{|\vec{v}_k(E)|} = df_E \cdot \frac{dE}{\hbar v}$$

$$\sigma = -\frac{e^2}{8\pi^3} \int \frac{v_x^2}{\hbar v} \tau (-\delta(E - E_F)) df_E dE$$

$$\boxed{\sigma = +\frac{e^2}{8\pi^3 \hbar} \int_{E=E_F} \frac{v_x^2}{v} \tau df_E}$$

Jetzt $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ voraussetzen:

6.12d

$$v_x(k) \Big|_{E=E_F} = v_x(k_F) = \text{const.} \quad \text{gilt auch für } v(k)$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2; \quad v_x^2 = v_y^2 = v_z^2; \Rightarrow v_x^2 = \frac{1}{3} v^2$$

$$\Rightarrow \sigma = + \frac{e^2}{8\pi^3 \hbar} \int_{E=E_F} \frac{1}{3} v \tau \, d\mathcal{E}$$

$$= + \frac{e^2}{8\pi^3 \hbar} \cdot \frac{1}{3} v \tau \cdot 2 \cdot 4\pi k_F^2$$

$$= \frac{1}{3} \frac{e^2}{\pi^3 \hbar} \cdot \frac{\hbar k_F}{m} \tau \pi k_F^2$$

$$= \frac{1}{3} \frac{e^2 \tau}{\pi^2 m} k_F^3; \quad k_F^3 = 3\pi^2 \cdot n$$

$$\sigma = \frac{e^2 \tau}{m} \cdot n; \quad \text{maximal } \sigma = \mu n$$

Beweglichkeit

$$\text{hier } \mu = \frac{e^2 \tau}{m}$$

σ sieht 'verdächtig' nach Drude-Modell aus: alle Elektronen tragen zur Leitf. bei, aber:

Tatsächlich trägt ein nur sehr kleiner Bruchteil mit der Energie E_F bei, dafür aber mit viel höherer Geschwindigkeit v_F .

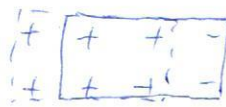
6.5 Elektrische Leitfähigkeit bei hohen Frequenzen ^{6.13}

Dielektrische Verschiebungsdichte D

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 E + P$$

Polarisation P

Hier



Verschieb. der Ladungsträger um u

$$\rightarrow P = -en u$$

Um u zu berechnen benutzt man:

$$nm\ddot{u} + \gamma\dot{u} = -neE \quad (6.12)$$

Elektronenkonzentration n , Masse m
keine Rückstellkraft!

Dämpfungskonstante γ :

Aus stationärem Fall ($\ddot{u} = 0$)

$$\gamma\dot{u} = -neE$$

$$j = -en\dot{u} = \frac{n^2 e^2}{\gamma} E$$

$= \sigma$ Leitfähigkeit

$$(6.12) \Rightarrow nm\ddot{u} + \frac{n^2 e^2}{\gamma} \dot{u} = -neE; \text{ mit } u(t) \propto e^{i\omega t}$$

$$\left(-nm\omega^2 + \frac{n^2 e^2}{\gamma} \omega (-i) \right) \underline{u(\omega)} = -neE$$

Man erhält:

$$\underline{P} = \frac{n^2 e^2}{-m\omega^2 - i \frac{n^2 e^2}{\sigma} \omega} \underline{E}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon_0 \underline{E}} &= \underline{\epsilon_0 \underline{E}} + \underline{P} \\ &= \underline{\epsilon_0 \underline{E}} \left[1 + \frac{n^2 e^2 \cdot \frac{1}{\epsilon_0}}{-m\omega^2 - i \frac{n^2 e^2}{\sigma} \omega} \right] \end{aligned}$$

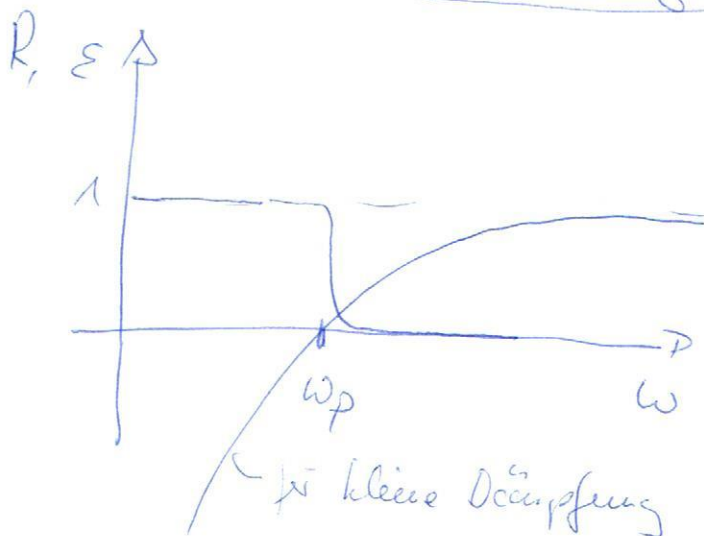
$$\Rightarrow \underline{\epsilon(\omega)} = 1 - \frac{\frac{n^2 e^2}{\epsilon_0 m}}{\omega^2 + i \frac{n^2 e^2 \epsilon_0}{\sigma m} \omega}$$

Def. Plasmafrequenz:

$$\frac{ne^2}{\epsilon_0 m} = \omega_p^2$$

$$n \sim \sqrt{\epsilon_0 \omega^2}$$

$$\left| \underline{\epsilon(\omega)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\sigma} \omega} \right| \approx 1 - \frac{1}{i \frac{\epsilon_0}{\sigma} \omega}$$



Reflexionsvermögen:

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}$$

Brechzahl $\tilde{n} = n + i\kappa$

$$\underline{\epsilon} = \epsilon_1 + i\epsilon_2; \quad \tilde{n} = \sqrt{\underline{\epsilon(\omega)}}$$

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon_1$$

$$2n\kappa = \epsilon_2$$

$\rightarrow$ Metall glänzt
($R=1$)